SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1995-96

Ermanno Lanconelli

ALCUNI ASPETTI DELL'ANALISI REALE NEGLI SPAZI OMOGENEI. REGOLARIZZAZIONE DELLE SOLUZIONI DEBOLI DELLE EQUAZIONI P-ELLITTICHE

7 marzo 1996

Tecnoprint - Bologna 1996

Riassunto

Viene presentata una rassegna di alcuni metodi di analisi reale e delle loro applicazioni allo studio delle equazioni alle derivate parziali lineari del secondo ordine con forma caratteristica semidefinta positiva.

Abstract

We present a survey on real analysis methods and their applications to the regularity theory for second order partial differential equations with non-negative characteristic form.

1 Alcuni risultati classici

I problemi di esistenza e di regolarità delle soluzioni di equazioni alle derivate parziali hanno condotto allo studio di spazi funzionali modellati su differenti metriche in $\mathbb{R}^N$. Gli spazi di Sobolev, l'ambito funzionale naturale per lo studio delle equazioni ellittiche, ad esempio, sono modellati sulla distanza euclidea e ne riflettono profondamente le proprieta' geometriche. Basta infatti ricordare che la disuguaglianza di immersione

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \qquad p = \frac{2N}{N-2}$$

si può dedurre dalla disuguaglianza isoperimetrica (cfr. Talenti [35]):

$$(H_N(E))^{\frac{1}{N}} \leq C_N(H_{N-1}(E))^{\frac{1}{N-1}}, \qquad E \subseteq \mathbb{R}^N, \quad \text{limitato} \tag{1}$$

ove H_t indica la misura di Hausdorff t-dimensionale, $C_N = N^{\frac{-1}{N-1}}|B(0,1)|^{\frac{-1}{N(N-1)}}$ e l'uguaglianza è verificata se e solo se E è un disco euclideo.

Altri spazi, naturalmente correlati con la distanza euclidea, sono gli spazi di Morrey, introdotti originariamente in connessione con questioni di calcolo delle variazioni e di regolarizzazione delle soluzioni di equazioni ellittiche.

Se $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$ e Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, una funzione $u \in L^p(\Omega)$ si dice che appartiene allo spazio di Morrey $L^{p,\lambda}(\Omega)$ se

$$\sup_B \frac{1}{|B|^\lambda} \int_{B\cap\Omega} |u|^p dx < \infty, \tag{2}$$

ove l'estremo superiore è preso sull'insieme dei dischi euclidei ($|B|=$ misura di Lebesgue di B). Una notevole variante degli spazi di Morrey è stata ideata da Campanato. Una funzione u di p-esima potenza sommabile in Ω appartiene allo spazio di Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ se

$$\sup_B \frac{1}{|B|^\lambda} \int_{B\cap\Omega} |u - u_B|^p dx < \infty, \tag{3}$$

ove u_B indica la media integrale di u su $B \cap \Omega$,

$$u_B := \int_{B\cap\Omega} u dx.$$

Se $0 \leq \lambda < 1$, lo spazio $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ coincide con lo spazio di Morrey $L^{p,\lambda}$ mentre, se $\lambda > 1$ e Ω soddisfa una blanda proprietà di regolarità, $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ *coincide* con lo spazio delle funzioni hölderiane di esponente $\alpha = N\frac{\lambda-1}{p}$.

Il primo di questi risultati si deve a Campanato [4]; il secondo, indipendentemente, allo stesso Campanato [5] ed a G.N. Meyers [28]. Un discorso a parte va fatto per lo spazio $\mathcal{L}^{p,1}$, per il particolare rilievo che esso ha avuto nell'analisi armonica in $\mathbb{R}^N$ e nella teoria della regolarità delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche, lineari e non lineari. Se Ω è un disco (oppure anche tutto $\mathbb{R}^N$) lo spazio $\mathcal{L}^{1,1}(\Omega)$ è stato originariamente introdotto e studiato da John e Nirenberg, e da questi indicato con BMO, lo spazio delle funzioni a oscillazione media limitata [23]. Il risultato di questi autori, spesso citato semplicemente come Lemma di John e Nirenberg, è il seguente:

$$\text{Se} \quad u \in BMO \qquad \text{allora} \qquad |\{x \in \Omega \ / \ |u(x) - u_B| \geq t\}| \leq ce^{-bt}|B|$$

per ogni disco $B \subset \Omega$, c e b indipedendenti da B. In particolare, se $u \in BMO$, allora

$$\int_B e^{a|u-u_B|}dx \leq c$$

per ogni disco $B \subset \Omega$ e $c, a > 0$ opportuni ed indipendenti da B.

Questo lemma fu immediatamente utilizzato da Moser [29] per un passaggio cruciale nella sua dimostrazione della disuguaglianza di Harnack per le soluzioni deboli non negative di equazioni ellittiche in forma di divergenza a coefficienti limitati e misurabili:

$$Lu := \sum_i \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}u) = 0. \tag{4}$$

Ricordiamo brevemente questo risultato. Se u è una soluzione debole positiva di (4) e se B è un disco euclideo tale che $2B \subset \Omega$, allora

$$\sup_B u \leq C \inf_B u \tag{5}$$

dove C è indipendente da u e da B.

Il procedimento iterativo ideato da Moser consente di provare che ogni soluzione debole $u > 0$ di (4) è limitata e verifica le seguenti disuguaglianze

$$\sup_B u \leq c_p\Big(\int_{2B} u^p\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \inf_B u \geq c_p\Big(\int_{2B} u^{-p}\Big)^{-\frac{1}{p}} \tag{6}$$

per ogni p positivo.

La (5) si può quindi ottenere da (6) se esiste $p > 0$ tale che

$$\int_B u^p dx \int_B u^{-p} dx \leq c.$$

Questa disuguaglianza è soddisfatta se $w = \log u \in BMO$. In tal caso infatti, per il lemma di John-Nirenberg, si ha

$$\begin{aligned}\int_B u^p dx \int_B u^{-p} dx &= \int_B e^{pw} dx \int_B e^{-pw} dx \\ &\leq \int_B e^{p(w-w_B)} dx \int_B e^{-p(w-w_B)} dx \\ &\leq (\int_B e^{p|w-w_B|} dx)^2 \leq c.\end{aligned}$$

Per dimostrare che $w = \log u$ è una funzione a oscillazione media limitata, Moser ha dapprima riconosciuto, direttamente dalla definizione di soluzione debole, che

$$\int_B |\nabla w|^2 \leq \frac{c}{r^2}, \qquad r = \text{raggio di } B$$

Da questa, utilizzando la classica disuguaglianza di Poincarè

$$\int_B |w - w_B|^2 \leq cr^2 \int_B |\nabla w|^2 \tag{7}$$

si ottiene

$$\int_B |w - w_B| \leq r(\int_B |\nabla w|^2)^{\frac{1}{2}} \leq c$$

e quindi $w \in BMO$.

Vogliamo anche ricordare la notevole importanza assunta, successivamente ai lavori di John e Niremberg e di Moser, dallo spazio $BMO(\mathbb{R}^N)$ nell'analisi armonica. Basta ricordare per questo il Teorema di Fefferman e Stein : $BMO(\mathbb{R}^N)$ è il duale dello spazio di Hardy $H^1(\mathbb{R}^N)$, lo spazio delle funzioni $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tali che i potenziali di Riesz $R_j(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ per ogni $j = 1, \ldots, N$.

Le proprietà della distanza euclidea hanno un ruolo fondamentale anche nella teoria degli integrali singolari di Calderon-Zygmund. Infatti, se si vuole "risolvere" l'equazione $-\Delta u = f$, si è naturalmente condotti a studiare le proprietà del potenziale newtoniano

$$\Gamma * f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) f(y) dy$$

dove Γ è la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace. Se f è una funzione hölderiana (e,ad esempio, a supporto compatto) allora $\Gamma * f$ ha le derivate seconde hölderiane e verifica l'equazione $-\Delta u = f$. Se la funzione f è soltanto continua allora, in generale, $\Gamma * f \notin C^2$, e l'equazione $-\Delta u = f$ non

è risolubile in senso classico, cioè non esiste alcuna funzione $u \in C^2$ tale che $-\Delta u = f$. Invece, se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e se $1 < p < \infty$, allora $\Gamma * f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\Delta(\Gamma * f)(x) = -f(x), \qquad q.d.$$

Questo risultato si deduce facilmente dal seguente Teorema di Calderon-Zygmund: per ogni $i, j = 1, \dots, N$ siano $\omega_{i,j}(x) = \partial^2_{x_i,x_j}\Gamma(x)$. Allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \omega_{i,j}(x-y) f(y) dy \tag{8}$$

esiste in $L^p(\mathbb{R}^N)$ (cfr. Stein [34] Cap. II, Teorema 3). Questo teorema si fonda su di un lemma di scomposizione di $\mathbb{R}^N$ in dischi euclidei, su alcuni dei quali f è piccola mentre , sui restanti, è piccolo il valor medio di f.

Possiamo ora ricordare che anche il lemma di John-Nirenberg si basa su questo lemma di scomposizione. È importante sottolineare che la convergenza dell'integrale in (8) è subordinata anche alle proprietà del *dominio di recisione* $\{|x-y| \geq \varepsilon\}$, che ha le medesime proprietà di simmetria dei nuclei $\omega_{i,j}$. Queste infatti sono funzioni omogenee rispetto alle dilatazioni

$$\delta(\lambda) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \qquad \delta(\lambda) = \lambda x$$

Inoltre

$$\int_{|y|=\varepsilon} \omega_{ij}(y) d\sigma(y), \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

I risultati sin qui richiamati, tutti modellati sulla distanza euclidea, e utilizzati nella teoria delle equazioni ellittiche, sono stati generalizzati in modo naturale per lo studio delle equazioni quasi-ellittiche, il cui esempio più classico è l'operatore del calore in $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_t$:

$$H = \Delta - \partial_t.$$

La soluzione fondamentale Γ di H

$$\Gamma(x,t) = (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}, \quad \text{per} \quad t > 0, \qquad \Gamma(x,t) = 0, \quad \text{per} \quad t \leq 0$$

è omogenea di grado $-N$ rispetto alle dilatazioni

$$\delta(\lambda)(x,t) = (\lambda x, \lambda^2 t). \tag{9}$$

Viene quindi spontaneo, se si vuole affrontare lo studio di H negli spazi L^p, analizzare classi di integrali singolari con nuclei omogenei rispetto alle dilatazioni $\delta(\lambda)$ in (9) e, conseguentemente, munire $\mathbb{R}^{N+1}$ di una metrica anch'essa $\delta(\lambda)$ omogenea.

Il primo a compiere questa generalizzazione è stato B.F. Jones, nel 1963 [24], che ha esteso la teoria di Calderon-Zygmund ad integrali singolari con nuclei aventi le seguente proprietà di omogeneità:

$$K(\lambda x, \lambda^m t) = \lambda^{-n} K(x, t).$$

Qualche anno piu tardi, nel 1966, Fabes e Riviere [11] hanno studiato una classe di nuclei più generali, omogenei nel senso seguente

$$K(\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_N} x_N) = \lambda^{-\sum \alpha_j} K(x), \tag{10}$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ sono arbitrari numeri reali ≥ 1.

Lo studio degli integrali singolari relativi ai nuclei (10) è stato condotto in [11] in perfetta analogia col caso "isotropo" di Calderon-Zygmund, sostituendo a quella euclidea una metrica omogena del tipo seguente

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^{\frac{1}{\alpha_j}} \tag{11}$$

che risulta omogenea di grado 1 rispetto alle dilatazioni

$$\delta(\lambda)(x) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_N} x_N).$$

Una metrica dello stesso tipo era stata introdotta da Barozzi qualche tempo prima, per lo studio della regolarità hölderiana delle soluzioni di equazioni quasi-ellittiche [2]. Barozzi propose una generalizzazione degli spazi di Morrey modellata sulla distanza (11), e fu immediatamente seguito da Da Prato [32] che introdusse una analoga generalizzazione degli spazi di Campanato. Gli spazi di Barozzi e di Da Prato si ottengono sostituendo, nelle definizioni (2) e (3), rispettivamente, i dischi euclidei con quelli della metrica (11).

Molto piú tardi, nel 1979, Macias e Segovia [27] hanno studiato una ampia generalizzazione degli spazi di Campanato, generalizzazione modellata su metriche aventi proprietà di omogeneità molto deboli, formulabili nei termini seguenti. Secondo la definizione di Coifman e Weiss [9] una tripla (X, d, μ) si

chiama spazio metrico omogeneo se d e μ sono, rispettivamente, una distanza e una misura di Borel regolare su X, tali che

$$A := \sup_{x \in X, r>0} \frac{\mu(B_d(x, 2r))}{\mu(B_d(x, r))} < \infty$$

dove $B_d(x, r)$ indica il disco di centro x e raggio r nella metrica d. Ovviamente $A \geq 1$. Si chiama dimensione omogenea di (X, d, μ) il numero reale

$$Q = \log_2 A.$$

Si riconosce facilmente che

$$\mu(B_d(x, tr)) \leq At^Q \mu(B_d(x, r))$$

per ogni $x \in X$, $r > 0$ e $t \geq 1$.

Se m è la misura di Lebesgue, d_e è la distanza euclidea e d_α la distanza (11), allora

$$(\mathbb{R}^N, d_e, m), \qquad (\mathbb{R}^N, d_\alpha, m)$$

sono spazi metrici omogenei di dimensione, rispettivamente N e $\sum_j \alpha_j$. Coifman e Weiss hanno dimostrato che in ogni spazio omogeneo vale un lemma di scomposizione di tipo Calderon-Zygmund. Ciò consente di sviluppare una teoria degli integrali singolari che generalizza, in particolare, quella classica di Calderon-Zygmund, quella di Jones e quella di Fabes e Riviere. Se definiamo poi lo spazio BMO_d come quello delle funzioni $u : X \to \mathbb{R}$ tali che

$$\sup_{B_d} \int_{B_d} |u - u_{B_d}| d\mu < \infty$$

il teorema di scomposizione di Coifman e Weiss permette di estendere il Lemma di John-Nirenberg alle funzioni $u \in BMO_d$. Questa estensione si deve a N. Burger e risale al 1978 [3]. Possiamo adesso richiamare i risultati di Macias e Segovia che generalizzano quelli di Campanato-Meyers e di Da Prato. Sia (X, d, μ) uno spazio omogeneo. Se $1 \leq p < \infty$ e $0 < \beta < \infty$, Macias e Segovia definiscono lo spazio $Lip(\beta, p)$ come l'insieme delle funzioni $u \in L^p_{loc}(X, \mu)$ tali che

$$\int_{B_d} |u - u_{B_d}|^p dx \leq c(\mu(B_d))^{p\beta}$$

e dimostrano che ogni funzione $u \in Lip(\beta, p)$ coincide quasi dappertutto con una funzione v hölderiana nel senso seguente :

$$|v(x) - v(y)| \leq c(\mu(B_d))^\beta$$

per ogni disco B_d tale che $x, y \in B_d$.

Vogliamo anche ricordare un recente risultato di Guozhen Lu [26] che ha introdotto una classe di spazi contenenti quelli di Morrey-Sobolev e le loro generalizzazioni proposte da Barozzi. Una precedente, più particolare estensione degli spazi di Morrey era stata considerata da Citti e Di Fazio [8] per lo studio delle proprietà di regolarità hölderiana delle soluzioni deboli di certe equazioni di tipo Schrödinger relative ad operatori sub-ellittici del secondo ordine.

2 Equazioni P-ellittiche e metriche di controllo

I risultati richiamati nel precedente paragrafo pongono il seguente problema generale: assegnato un operatore del secondo ordine

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}(a_{i,j}\partial_{x_i}) \tag{12}$$

con forma caratteristica semidefinita positiva

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \qquad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^N \tag{13}$$

è possibile associare ad esso una distanza d che abbia nei suoi confronti lo stesso ruolo che la distanza euclidea ha per le equazioni ellittiche? In particolare: è possibile dedurre risultati di regolarità delle soluzioni deboli di $Lu = 0$ dalle proprietà geometriche di d? Una prima risposta a questo problema si può trovare in un lavoro di Kuptsov del 1968 [25]. Se, grosso modo, esiste una m-pla $P_1, \ldots, P_m$ di campi vettoriali di classe C^∞ tali che

(*i*) $\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{j=1}^{m} \langle P_j(x), \xi_j \rangle^2$

(*ii*) l'algebra di Lie generata da $P_1, \ldots, P_m$ è libera, stratificata e di rango massimo in ogni punto di $\mathbb{R}^N$,

Kuptsov associa all'operatore L una distanza d, in qualche modo analoga a quella di Barozzi e di Fabes e Riviere, ed afferma, in modo sommario, che utilizzando la tecnica iterativa di Moser si può dimostare la regolarità hölderiana delle soluzioni deboli di $Lu = 0$. Sfortunatamente, l'anno precedente, Hörmander [21] aveva dimostrato, sotto la sola ipotesi di "rango massimo", che le soluzioni deboli dell' equazione

$$\sum_{j=1}^{m} P_j^2 u = f$$

sono di classe C^∞ se f è di classe C^∞. Il lavoro di Kuptsov, tardivo e modesto rispetto a quello di Hormander, è stato sempre ignorato, o per lo meno subito dimenticato. Tuttavia, esso contiene un'idea, la quale, ripresa poi da vari autori più o meno indipendentemente e in contesti a volte anche diversi, ha generato un filone di ricerche tutt'ora non esaurito.

Possiamo introdurre l'argomento richiamando la definizione di metrica di controllo relativa ad una m-pla $P = (P_1, \dots, P_m)$ di campi vettoriali e localmente lipschitziani su $\mathbb{R}^N$. Una curva regolare a tratti $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ diremo che è una P-traiettoria se esistono delle funzioni $a_1, \dots, a_m : [0,1] \to \mathbb{R}$ tali che

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t) P_j(\gamma(t)), \quad q.d. \quad \text{su} \quad [0,1]$$

In questo caso poniamo

$$\|\gamma\| = \|\gamma\|_P := \sup_{t\in[0,1]} (\sum_{j=1}^{m} a_j^2(t))^{\frac{1}{2}}.$$

Indicando con $\Gamma(P)$ l'insieme delle P-traiettorie, per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^N$, si definisce

$$d_P(x,y) = d(x,y) := \inf\{\|\gamma\| \,/ \gamma \in \Gamma(P), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} \tag{14}$$

Se $\mathbb{R}^N$ è *P-connesso*, cioè se l'insieme al secondo membro di (14) non è vuoto qualunque siano $x, y \in \mathbb{R}^N$, allora d è una distanza, e viene chiamata distanza di controllo, o di Carathèodory. Se i campi $P_1, \dots, P_m$ sono sufficientemente regolari e lo spazio vettoriale generato dai loro commutatori di ordine $\leq q$, con q opportunamente grande, ha dimensione N in ogni punto di $\mathbb{R}^N$, allora $\mathbb{R}^N$ è P-connesso (Carathèodory [6], 1909; P.K.Razevskii [33], 1939; W.L. Chow [7], 1940; R. Hermann [20], 1968). La metrica di Kuptsov

precedentemente citata è una metrica di controllo. Metriche che riflettono le proprietà di commutazione di campi vettoriali di classe C^∞ sono state studiate da Folland e Hunt [13], Folland e Stein [14] , Fefferman e Phong [12], Nagel, Stein e Wainger [30]. In tutti questi lavori i campi vettoriali rispetto ai quali viene costruita e studiata la distanza di controllo sono regolari almeno quanto occorre affinchè si possano "commutare" fra loro un numero di volte sufficiente a generare N vettori linearmente indipendenti in ogni punto di $\mathbb{R}^N$. In una nota con B. Franchi del 1982 [17] abbiamo studiato una metrica di controllo relativa ad una N-pla $P_1, \dots, P_N$ di campi vettoriali non regolari, dimostrando un teorema di struttura dei dischi ad essa relativi e stimando in modo preciso la loro misura (di Lebesgue). La nostra idea era quella di utilizzare la tecnica di Moser, sostituendo la metrica euclidea usuale con la nuova distanza, per dimostrare la regolarità hölderiana delle soluzioni deboli di una equazione del tipo (12), "ellittica" rispetto alla N-upla $P_1, \dots, P_N$. Per chiarire il punto di vista adottato in [17], e successivamente sviluppato in [15], è opportuno introdurre alcune definizioni e richiamare i punti essenziali dell'ormai più volte citato procedimento di Moser. Se $P_1, \dots, P_m$ è una m-pla di campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$, diremo che l'operatore (12) è P-ellittico se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m}\langle P_j(x), \xi_j\rangle^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq c\sum_{j=1}^{m}\langle P_j(x), \xi_j\rangle^2$$

Osserviamo subito che tutti gli operatori ellittico-parabolici con coefficienti abbastanza regolari sono P-ellittici rispetto ad un opportuna m-pla P. Infatti, per un risultato di Phillips e Sarason [31], se (a_{ij}) è semidefinita positiva e se $a_{ij} \in C^2$, allora esiste una matrice (α_{ij}) semidefinita positiva e a coefficienti localmente lipschitziani tale che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{h=1}^{N}(\sum_{j=1}^{N}\alpha_{hj}\xi_j)^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Ovviamente, se la m-pla P non ha qualche proprietà di "coercività", un operatore P-ellittico avrà ben poche proprietà di regolarità. Una prima, spontanea, richiesta di coercività è la seguente: $\mathbb{R}^N$ è P-connesso e $(\mathbb{R}^N, d_P, m)$, è uno spazio metrico omogeneo. In [17] abbiamo dimostrato che tale proprietà è verificata se $P = (\lambda_1\partial_{x_1}, \dots, \lambda_N\partial_{x_N})$, ove le funzioni λ_j sono positive fuori dagli iperpiani coordinati e degenerano in modo controllato da "potenze"

delle variabili $x_1, \dots, x_N$. Un caso particolare che rientra in [17] è il seguente: scrivendo $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^p_x \times \mathbb{R}^q_y$,

$$X_j = \partial_{x_j}, \quad j = 1, \dots, p, \qquad Y_k = |x|^\alpha \partial_{y_k}, \quad k = 1, \dots, q,$$

dove α è un qualunque reale positivo. L'operatore

$$L = \Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y \tag{15}$$

è $(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q)$ ellittico. Quando α è un intero positivo l'operatore L rientra nella classe studiata da Hormander. Operatori come questo vengono oggi chiamati operatori di tipo Grushin, o di tipo Baouendi-Grushin, in omaggio a Baouendi e a Grushin. Il primo di questi autori aveva studiato, nel 1967 [1] un problema al contorno per (15) su un aperto contenuto nella regione $x > 0$, con metodi che utilizzano spazi di Sobolev con peso. Il secondo, nel 1970, aveva affrontato una questione in un certo senso più vicina allo spirito dei problemi qui esposti, dimostrando che, nel caso di α intero positivo, l'ipoellitticità dell'operatore (15) viene sensibilmente influenzata dall'aggiunta di termini d'ordine inferiore a coefficienti complessi, e fornendo una condizione necessaria e sufficiente di ipoellitticità.

Se L è un operatore P-ellittico vi è una maniera naturale di dare la definizione di soluzione debole dell'equazione $Lu = 0$. Posto

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv + \int_\Omega \sum_{j=1}^m P_j u P_j v := \int_\Omega uv + \int_\Omega \langle Pu, Pv \rangle$$

indicando con $W_P(\Omega)$ e $W_P^0(\Omega)$, rispettivamente, le chiusure di $C^1(\bar{\Omega})$ e $C_0^1(\Omega)$ rispetto alla norma generata dal precedente prodotto interno, e con $W_P^{loc}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ tali che $\phi u \in W_P^0(\Omega)$, per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ la forma bilineare

$$a(u, v) = \int_\Omega \langle Pu, Pv \rangle, \qquad u \in C^1(\bar{\Omega}), \quad v \in C_0^1(\Omega)$$

si può prolungare con continuità su $W_P^{loc} \times W_P^0$. Una funzione $u \in W_P^{loc}(\Omega)$ sarà chiamata soluzione debole di $Lu = 0$ se $a(u, v) = 0$, per ogni $v \in W_P^0(\Omega)$.

Il procedimento di Moser può venire agevolmente adattato agli operatori P-ellittici sostituendo in esso la metrica euclidea con quella di controllo, purchè siano verificate le seguenti condizioni:

1. $(\mathbb{R}^N, d_P, m)$ è uno spazio omogeneo

2. Per ogni disco $B_d(x,r)$ esiste una funzione P-lipschitziana ϕ con supporto in $B_d(x,r)$, uguale ad 1 in $B_d(x,r/2)$ e tale che

$$|P\phi| \leq \frac{c}{r}$$

con c indipendente da r e da x.

3. Per ogni disco $B = B_d(x,r)$ risulta

$$\int_B |u - u_B|^2 \leq cr^2 \int_{2B} |Pu|^2,$$

con c indipendente da B e da u.

4. Esiste $p > 2$ tale che, per ogni disco $B = B(x,r)$, si ha

$$(\int_B u^p)^{\frac{1}{p}} \leq cr(\int_B |Pu|^2)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $u \in C_0^1(B)$ e per ogni $r \leq r_0$, con c ed r_0 non dipendenti da u e da B.

Risultati molto recenti di Franchi, Serapioni e Serra Cassano [19] e di Franchi, Lu e Weeden [18] assicurano che la proprietà (2) è conseguenza della (1) e che (3) e (2), se vale (1), sono entrambe conseguenza della seguente disuguaglianza di tipo Poincarè

$$\int_B |u - u_B| \leq cr \int_{2B} |Pu|. \qquad \forall u \in C^1(2\bar{B}) \tag{16}$$

Vale allora il Teorema seguente.

Teorema. *Se $(\mathbb{R}^N, d_P, m)$ è uno spazio omogeneo e se vale la disuguaglianza di Poincarè (16), ogni soluzione debole di ogni equazione P-ellittica è localmente hölderiana rispetto alla distanza d_P.*

La disuguaglianza di Poincarè si presenta dunque quindi come un passaggio cruciale nella teoria della regolarità per le equazioni P-ellittiche. A tutt'oggi essa è nota in alcuni casi particolari.

1. $P = (\lambda_1 \partial_{x_1}, \ldots, \lambda_N \partial_{x_N})$ con le λ_j verificanti le proprietà precedentemente richiamate e contenute in [17]. In questo caso la disuguaglianza di Poincarè è stata dimostrata in [15].

2. $P = (P_1, \dots, P_m)$, con $P_j \in C^\infty$, e rango $\mathcal{L}(P_1, \dots, P_m)(x) = N$, per tutti gli $x \in \mathbb{R}^N$. In questo caso la disuguaglianza di Poincarè è stata dimostrata da Jerison [22].

Un problema aperto è quello di determinare ulteriori condizioni sufficienti su P atte a garantire la disuguaglianza (16).

3 Mappe quasi-esponenziali e disuguaglianza di Poincarè

In questo ultimo paragrafo vogliamo illustare brevemente un metodo nuovo che sembra dare una prima risposta al quesito posto nel precedente paragrafo.

Chiamiamo *mappa quasi-esponenziale* (q.e. in breve) un'applicazione di classe C^1

$$E : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

tale che $E(x, 0) = x$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Se E ed F sono mappe q.e., scriviamo $F \cdot E$ per indicare la funzione

$$(x, h) \mapsto F(E(x, h), h).$$

Allora $F \cdot E$ è ancora una mappa q.e.

Sia $P = (P_1, \dots, P_m)$ una m-pla di campi vettoriali localmente lipschitziani su $\mathbb{R}^N$. Assumiamo che le mappe

$$(x, t) \mapsto \exp(tX_j)(x), \quad j = 1, \dots, m$$

siano definite per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Se $j \in \{1, \dots, m\}$ e $k \in \{1, \dots, N\}$, la mappa

$$E_{j,k}(x, h) := \exp(h_k P_j)(x).$$

è una mappa q.e. Di conseguenza, ogni composizione di un numero finito di $E_{j,k}$ è una mappa q.e.

Supponendo $\mathbb{R}^N$ P-connesso, diremo che una mappa q.e. E è una P-connessione se esiste una funzione

$$\gamma_E : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$$

tale che

(i) $t \to \gamma_E(x,h,t)$ è una P-traiettoria per ogni x ed h fissati;

(ii) $\gamma_E(x,h,0) = x, \gamma_E(x,h,1) = E(x,h)$

(iii) $x \mapsto \gamma(x,h,t)$ è iniettiva, per ogni h e t fissati, e

$$|\det \frac{\partial \gamma_E}{\partial x}(x,h,t)| \geq a > 0$$

ove a è una costante opportuna (dipendente solo da γ_E).

Poniamo

$$\|E(x,h)\| = \|\gamma_E(x,h,\cdot)\|, \quad B_E(x,r) = \{E(x,h) \quad | \quad \|E(x,h)\| < r\}$$

ed osserviamo che, essendo $\|E(x,h)\| \geq d(x,E(x,h))$, si ha

$$B_E(x,r) \subseteq B_d(x,r).$$

Supponiamo ora che esista una famiglia finita $\mathcal{E} = \{E\}$ di P-connessioni, con la seguente proprietà:

per ogni compatto K esistono $r_0 > 0$ ed $a \in]0,1[$ tali che, se $x \in K$ e $0 < r < r_0$, esiste $E \in \mathcal{E}$ verificante le condizioni seguenti

$(H1)$ $\quad B_E(x,ar) \subseteq B_d(x,r) \subseteq B_E(x,r)$

$(H2)$ $\quad h \mapsto E(x,h)$ è iniettiva sull'insieme

$$H_E(x,r) := \{h \,|\, \|E(x,h)\| \leq r\}$$

$(H3)$

$$a|\det \frac{\partial E}{\partial h}(x,0)| < |\det \frac{\partial E}{\partial h}(x,h)| < \frac{1}{a}|\frac{\partial E}{\partial h}(x,0)|,$$

per ogni $h \in H_E(x,r)$.

Osservazione 1. Queste ipotesi sono soddisfatte nel caso Hormander prendendo come P-connessioni opportune composizioni di esponenziali di campi. Si dovrà utilizzare la formula di Campbell-Hausdorff e la rappresentazione dei dischi di controllo data da Nagel, Stein e Wainger [30].

Osservazione 2 Le ipotesi precedenti sono verificate anche nel caso [17].

Sotto le ipotesi (H), e supponendo che la metrica di P sia di tipo omogeneo, vale il seguente teorema.

Teorema

$$\int_{B\times B} |u(x) - u(y)| dxdy \leq cr|B| \int_{cB} |Pu| dz \tag{17}$$

dove $B = B(\bar{x}, r), \bar{x} \in K, 0 < r < \frac{r_0}{c}, c = c(K, \mathcal{E})$.

Vogliamo concludere questa esposizione ricordando che una condizione sufficiente per una disuguaglianza di Poincarè non "omogenea", cioè del tipo

$$\int_{B(x,r)} |u - u_B| \leq C(r, R) \int_{B(x,R)} |Pu|$$

ove B indica qui un disco euclideo, era stata data in [16]. Questa condizione presenta qualche analogia con quella qui introdotta, ma non consente di ottenere nè la disuguaglianza dimostrata in [15] nè quella di Jerison. Più vicina a questa nuova condizione è quella contenuta in una nota di D. Danielli [10] ove viene data una condizione sufficiente per l'immersione compatta di W_P^0 in L^2. Tuttavia, neppure le tecniche di [10] consentono di ottenere le disuguaglianze di Poincarè contenute in [15] e [22].

Bibliografia

[1] M. S. Baouendi, *Sur une class d'operateurs elliptiques dégénérant au bord*, C.R.A.S., Ser. A-B (1966).

[2] G. C. Barozzi, *Su una generalizzazione degli spazi $l^{q,\tau}$ di morrey*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 19 (1965).

[3] N. Burger, *Espaces des functions á variation moyenne bornée sur un espace de nature homogéne*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 236 (1978).

[4] S. Campanato, *Proprietá di inclusione per spazi di Morrey*, Ricerche di Matematica, XII (1963).

[5] ——, *Proprietá di hölderianitá di alcune classi di funzioni*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XVIII (1964).

[6] C. CARATHÉODORY, *Untersuchungen über grundlagen der thermodynamik*, Math. Ann., 67 (1909).

[7] W. L. CHOW, *Über systeme von linearen partiellen differentialgleichungen erster ordming*, Math. Ann., 117 (1940).

[8] G. CITTI AND G. D. FAZIO, *Hölder continuity of the solutions for operators which are a sum of squares of vector fields plus a potential*, Proccedings of the A.M.S., 122 (1994).

[9] R. R. COIFMAN AND G. WEISS, *Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogénes*, in Lecture Notes in Math., vol. 242, Springer-Verlag, 1971.

[10] D. DANIELLI, *A compact embedding theorem for a class of degenerate Sobolev spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politocn. Torino, 49 (1991).

[11] E. B. FABES AND N. RIVIÉRE, *Singular integrals with mixed homogeneity*, Studia Math., 27 (1966).

[12] C. FEFFERMAN AND D. H. PHONG, *Subelliptic eigenvalue problems*, in Conference on Harmonic Analysis, Chicaco 1980, W. Beckner et al., Wandsworth 1981.

[13] G. FOLLAND AND H. T. HUNT, *Non-isotropic Lipschitz spaces*, in Harmonic Analysis in Euclidean spaces, Amer. Math. Soc. Part 2, Providence, 1979.

[14] G. B. FOLLAND AND E. M. STEIN, *Estimates for the $\bar{\theta}_b$ complex and analysis on the heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974).

[15] B. FRANCHI AND E. LANCONELLI, *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 10 (1983).

[16] ——, *Une condition géometrique pur l'inégalité de Harnack*, J. Math. Pures Appl., 9 (1985).

[17] ——, *Une métrique associeé á une classe d'operateurs elliptiques dégenéres*, in Proceedings of the meeting "Linear Partial and Pseudo Differential operators, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino, Torino, 1982.

[18] B. FRANCHI, G. LU, AND R. L. WHEEDEN, *A relationship between Poincaré-Type inequalities and representation in spaces of homogeneous type*, Intl. Math. Research Notices, 1 (1996).

[19] B. FRANCHI, R. SERAPIONI, AND F. S. CASSANO, *Approximation and imbedding theorems for weighted Sobolev spaces associated with Lipschitz continuous vector fields*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (1996).

[20] R. HERMANN, *Differential geometry and the calculus of variations*, Academic Press, New York London 1968.

[21] L. HORMANDER, *Hypoelliptic second-order differential equations*, Acta Math., 119 (1967).

[22] D. JERISON, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander conditions*, Duke Math. J., 53 (1986).

[23] F. JOHN AND L. NIRENBERG, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure and Appl. Math., 14 (1961).

[24] B. F. JONES, *Singular integrals and parabolic equations*, Bull. A.M.S., 69 (1963).

[25] L. P. KUPCOV, *Disuguaglianza di Harnack per soluzioni generalizzate di equazioni ellittiche degeneri del secondo ordine,(in russo)*, Differential'nie Uravnienija, 4 (1968).

[26] G. LU, *Embedding theorems on Campanato-Morrey spaces for vector fields and applications.* preprint.

[27] R. A. MACIAS AND C. SEGOVIA, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Advances in Math., 33 (1979).

[28] G. N. MEYERS, *Mean oscillation over cubes and hölder continuity*, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964).

[29] J. MOSER, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure and Appl. Math., 14 (1961).

[30] A. NAGEL, E. M. STEIN, AND S. WAINGER, *Balls and metric defined by vector fields i: basic properties*, Acta Math., 155 (1985).

[31] R. PHILLIPS AND L. SARASON, *Elliptic-parabolic equations of the second order*, J. Math. Mech., 17 (1967/68).

[32] G. D. PRATO, *Spazi $L^{p,\theta}(\Omega, S)$ e loro proprietá*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 69 (1965).

[33] P. K. RAZEVSKII, *Sulla connettibilitá di due punti qualunque di uno spazio non olonomo mediante una curva ammissibile*, Uc. Zap. Moskov. Gus. Ped Inst. inn, Libknehta Ser. FiZ. Mat., 2 (1938).

[34] E. M. STEIN, *Harmonic Analysis*, Princeton Univ. Press, 1993.

[35] TALENTI, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura ed Applicata, 4 (1976).